数理解析研究所講究録
1140 巻 2000 年 140-144

Finite p-groups with two conjugacy length

千葉大自然科学研究科 石川 賢太 (Kenta Ishikawa)

1 導入

G を有限群とし $Cl(G)$ を G の共役類全体の集合、$Irr(G)$ を G の既約指標全体の集合とするとき

$$\begin{aligned} cl(G) &:= \{|C|\ ;\ C \in Cl(G)\} \\ cd(G) &:= \{\chi(1)\ ;\ \chi \in Irr(G)\} \end{aligned}$$

とおく。$cd(G)$ に条件をあたえることでそれらの群の性質を導き出そうとする研究がありその中に次のような結果がある。

定理 1.1 (Isaacs-Passman) G を有限群とし $cd(G) = \{1, m\}(m \gneq 1)$ とする。このとき $D(G)$ はアーベル群である。

このことと同様のことが $cl(G) = \{1, m\}(m \gneq 1)$ なる有限群においても成り立つのではないかという予想がある。この予想は未解決ではあるが、そのことを求めようとする過程において m が小さい場合における分類ができ、それが今回の結果である。なお今まで得たこの条件を満たす群の例において全ての $D(G)$ はアーベル群となっている。そもそも $cl(G) = \{1, m\}(m \gneq 1)$ の群に関しては伊藤先生の論文に始まり、その中に次の結果がある。

定理 1.2 (Ito[3]) G を有限群とし $cl(G) = \{1, m\}(m \gneq 1)$ とする。このときある素数 p が存在し $G = P \times A$ と書ける。ここで P は非アーベル *Sylow* p- 部分群、アーベル p'- 部分群である。特に m は p 巾である。

このことから $cl(G) = \{1, m\}(m \gneq 1)$ なる群の研究は p- 群に帰着できる。今回の分類は $cl(G) = \{1, p^n\}(1 \leq n \leq 3)$ なる有限 p- 群を isoclinism を度外視して行った。isoclinism とは群の上での同値関係であり我々の分類上極めて有用は概念である。また $cl(G) = \{1, m\}(m \gneq 1)$ なる群に対しては伊藤先生の結果以降も Mann,Verardi[4] による興味深い結果がいくつかあり

- $G/Z(G)$ は exponent p である。
- $Z_2(G) = C_G(D(G))$

などがある。

2 Isoclinism

$cl(G) = \{1, p^n\} (n \geq 1)$ の群を同型において分類しようとするとひどく煩雑になってしまうのでそれをまとめる概念として Hall によって導入された isoclinism を利用する。[1]

定義 2.1 G と H を有限群とする。(φ_1, φ_2) が G から H への *isoclinism* であるとは次の条件を満たすものをいう。

(1) φ_1 は $G/Z(G)$ から $H/Z(H)$ への同型。

(2) φ_2 は $D(G)$ から $D(H)$ への同型。

(3) 図式

$$\begin{array}{ccc} G/Z(G) \times G/Z(G) & \xrightarrow{\varphi_1 \times \varphi_1} & H/Z(H) \times H/Z(H) \\ {\scriptstyle a_G}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle a_H} \\ D(G) & \xrightarrow[\varphi_2]{} & D(H) \end{array}$$

は可換である。ここで $a_G : (xZ(G), yZ(G)) \mapsto [x, y]$ とする。

このとき $G \sim H$ と表すこととする。

isoclinism の性質として次のことが知られている。

- isoclinism は群の間の同値関係をつくる。
- $G \simeq H \Rightarrow G \sim H$
- G がアーベル群 $\Rightarrow G \sim 1$
- $G \sim H \Rightarrow cl(G) = cl(H), cd(G) = cd(G)$

定義と上の性質より isoclinism を度外視して $cl(G) = \{1, p^n\} (n \geq 1)$ の群の分類をすることとする。更にこの同値類の中から都合の良いものとして次のようなものを取ってくる。

定義 2.2 *isoclinism* による同値類 Φ に対して Φ の最小位数の群を *stem* 群と呼ぶ。

命題 2.3 G が *stem* 群であることと $Z(G) \leq D(G)$ であることは同値である。

ここで

$$W_n := \{cl(G) = \{1, p^n\} \text{なる有限} stem\ p\text{−群全体の集合}\}$$

とおくこととする。

3 結果

次の結果がある。

命題 3.1 ([2]) $G \in W_1 \Leftrightarrow G$は*extraspesial* $p-$ 群

定理 3.2 ([2]) $G \in W_2$
$\Rightarrow G$ は次のいずれかを満たす：

(1)

$$G \sim H = \langle a_1, a_2, a_3, b_{12}, b_{13}, b_{23} \ ; \ [a_i, a_j] = b_{ij}, \\ a_i^p = a_3^p = b_{ij}^p = 1 \ (1 \leq i < j \leq 3) \rangle$$

(2) $[G, x] = D(G) = Z(G)$ *for every* $x \in G - D(G)$ かつ $|D(G)| = p^2$

(3) p を奇素数とし

$$G \sim H = \langle a_1, a_2, b, c_1, c_2 \ ; \ [a_1, a_2] = b, \ [a_i, b] = c_i, \\ a_i^p = b^p = c_i^p = 1 \ (i = 1, 2) \rangle$$

定理 3.3 $G \in W_3$
$\Rightarrow G$ は次のいずれかを満たす：

(1)

$$G \sim H = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{23}, b_{24}, b_{34} \ ; \ [a_i, a_j] = b_{ij}, \\ a_i^p = a_4^p = b_{ij}^p = 1 \ (1 \leq i < j \leq 4) \rangle$$

(2)

$$G \sim H = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{23}, b_{24} \ ; \ [a_i, a_j] = b_{ij}, [a_1, a_4] = b_{14}, \\ [a_2, a_4] = b_{24}, [a_3, a_4] = b_{12}, \\ a_i^p = a_3^p = a_4^p = b_{ij}^p = b_{14}^p = b_{24}^p = 1 \\ (1 \leq i < j \leq 3) \rangle$$

(3) p を奇素数とし

$$G \sim H = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \ ; \ [a_1, a_2] = [a_3, a_4]^g = b_1, \\ [a_1, a_3] = [a_2, a_4] = b_2, \\ [a_1, a_4] = b_3, [a_2, a_3] = b_4, \\ a_i^p = b_i^p = 1 \ (i = 1, 2, 3, 4) \rangle$$

ここで g は *non-quadratic residue* とする。

(4) $p = 2$ とし

$$\begin{aligned} G \sim H = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \quad ; \quad & [a_1, a_2] = b_1,\ [a_1, a_3] = [a_2, a_4] = b_2, \\ & [a_1, a_4] = b_3,\ [a_2, a_3] = b_4,\ [a_3, a_4] = b_1 b_2, \\ & a_i^2 = b_i^2 = 1\ (i = 1, 2, 3, 4) \rangle \end{aligned}$$

(5) $[G, x] = D(G) = Z(G)$ *for every* $x \in G - D(G)$ *and* $|D(G)| = p^3$

4 例

例 4.1 条件

$$[G, x] = D(G) = Z(G) \ for\ every\ x \in G - D(G)$$

を満たす例として次のものがある。

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; a, b, c \in GF(p^n) \right\} \in Syl_p(SL(3, p^n))$$

この群は W_n に含まれる。また $Z \lneq Z(P)$ とすると P/Z も上の条件を満たすことが分かり $|Z(P) : Z| = p^m$ とすると P/Z は W_m に入ることが分かる。この方法によって上の条件を満たす群は *isoclinism* を度外視しても W_n の中に無限に存在することが分かる。

注意 4.2 Verardi[4] によって $cl(G) = \{1, p^n\} (n \geq 1)$ なる群に対し $D(G)$ がアーベル群であることと *nilpotency class* が 3 以下であることが同値であることが知られている。

次のことが分かっている。

定理 4.3 (Verardi [4]) p を奇素数とすると任意の $n \in N$ に対して *nilpotency class* 3 を持つ W_{2n} に含まれる群が存在する。

$n = 1$ の場合が定理 3.2(3) である。我々の知る限りでは nilpotency class 3 以上の群はこれら以外にみつかっていない。

参考文献

[1] P. Hall, The classification of prime-power groups, *J. Reine Angew. Math.* **182** (1940) 130–141.

[2] K. Ishikawa, Finite p-groups up to isoclinism, which have only two conjugacy lengths, *J. Algebra* **220** (1999), 333–345.

[3] N. Ito, On finite groups with given conjugate types I, *Nagoya Math. J.* **8** (1953), 17–28.

[4] L.Verardi, On groups whose noncentral elements have the same finite number of conjugates, *Boll. Unione Mat. Italia.* **(7)**, 2A (1988), 391–400.